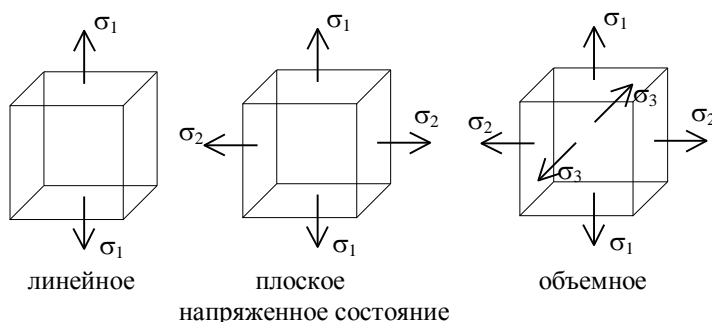


Напряженное и деформированное состояние

Различают три вида напряженного состояния:

- 1) линейное напряженное состояние — растяжение (сжатие) в одном направлении;
- 2) плоское напряженное состояние — растяжение (сжатие) по двум направлениям;
- 3) объемное напряженное состояние — растяжение (сжатие) по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

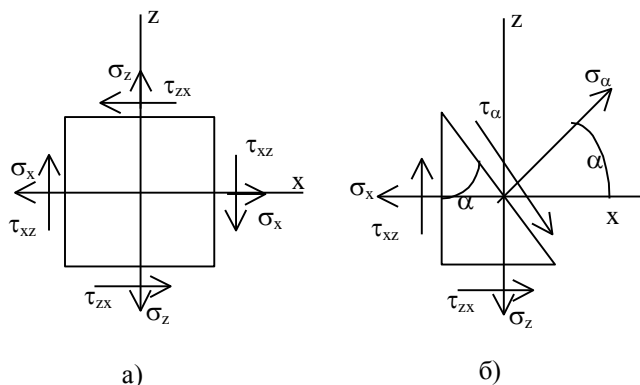
Рассматривают бесконечно малый параллелепипед (кубик). На его гранях могут быть нормальные σ и касательные τ напряжения. При изменении положения "кубика" напряжения меняются. Можно найти такое положение, при котором нет касательных напряжений см. рис.



Площадки, по которым не действуют касательные напряжения, называются главными площадками, а нормальные напряжения на этих площадках — главными напряжениями.

Главные напряжения обозначают: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и $\boxed{\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3}$

Плоское напряженное состояние



Разрежем элементарный параллелепипед (рис.а) наклонным сечением. Изображаем только одну плоскость. Рассматриваем элементарную треугольную призму (рис.б). Положение наклонной площадки определяется углом α . Если поворот от оси x против час.стр. (см. рис.б), то $\alpha > 0$.

Нормальные напряжения имеют индекс, соответствующий оси их направления.

Касательные напряжения, обычно,

имеют два индекса: первый соответствует направлению нормали к площадке, второй — направлению самого напряжения (к сожалению, встречаются и другие обозначения, и другой выбор осей координат, что приводит к изменению знаков в некоторых формулах).

Нормальное напряжение положительно, если оно растягивающее, касательное напряжение положительно, если оно стремится повернуть рассматриваемую часть элемента относительно внутренней точки по час.стр (для касательного напряжения в некоторых учебниках и вузах принято обратное).

Напряжения на наклонной площадке:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha$$

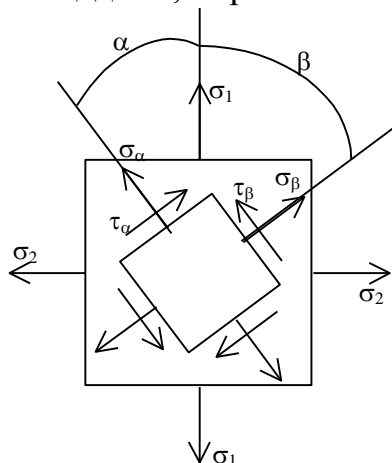
$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha$$

или
$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha$$

Закон парности касательных напряжений: если по площадке действует касательное напряжение, то по перпендикулярной к ней площадке будет действовать касательное напряжение, равное по величине и противоположное по знаку. ($\tau_{xz} = -\tau_{zx}$)

В теории напряженного состояния различают две основные задачи.

Прямая задача. По известным главным напряжениям: $\sigma_1 = \sigma_{\max}$, $\sigma_2 = \sigma_{\min}$ требуется определить для площадки, наклоненной под заданным углом (α) к главным площадкам, нормальные и касательные напряжения:



$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

или
$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha.$$

Для перпендикулярной площадки:

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha$$

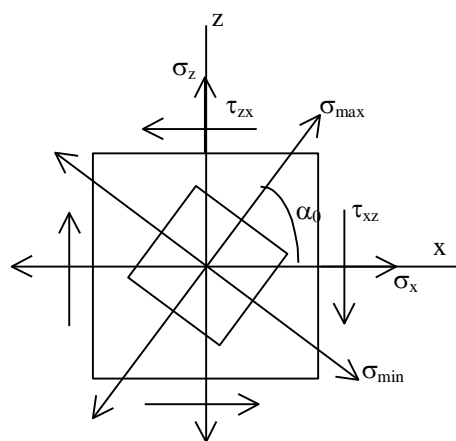
$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha.$$

Откуда видно, что $\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2$ — сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам инварианта (независима) по отношению к наклону этих площадок.

Как и в линейном напряженном состоянии максимальные касательные напряжения имеют место при $\alpha = \pm 45^\circ$, т.е. по площадкам, наклоненным к главным площадкам под углом 45°

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Обратная задача. По известным нормальным и касательным напряжениям, действующим в двух взаимно перпендикулярных площадках, найти главные (max и min) напряжения и положение главных площадок.



$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}$$

(касательные напряжения по главным площадкам равны 0).

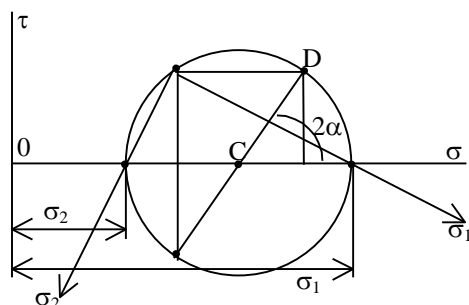
Угол α_0 , определяющий положение главных площадок:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} \quad \text{или}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_1 - \sigma_2}.$$

Если одно из главных напряжений окажется отрицательным, то их надо обозначать σ_1, σ_3 , если оба отрицательны, то σ_2, σ_3 .

Круг Мора (круг напряжений). Координаты точек круга соответствуют нормальным и касательным напряжениям на различных площадках.



Откладываем от оси σ из центра C луч под углом 2α ($\alpha > 0$, то против час.стр.), находим точку D , координаты которой: $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$. Можно графически решать как прямую, так и обратную задачи.